個經習題(一)：第1、2題解答

1. (a) $U_x = 3X^{-\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$

$$U_{xx} = -2X^{-\frac{5}{3}}Y^{\frac{2}{3}} < 0 \quad \text{for } X, Y > 0$$

∴ 合於「邊際效用遞減律」

同理，Y 亦然。

(b) $MU_x = 3X^{-\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$

$$MU_y = 6X^{\frac{1}{3}}Y^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{1}{2} \bullet \frac{Y}{X}$$

解：
$$\begin{cases} (1) \ \frac{1}{2} \bullet \frac{Y}{X} = \frac{P_x}{P_y} \\ (2) \ P_x X + P_y Y = I \end{cases}$$

$$\boxed{X = \frac{I}{3P_x} \qquad Y = \frac{2}{3} \bullet \frac{I}{P_y}}$$
為 Demand Functions

X 商品的：

$$\text{所得需求彈性} \equiv \frac{I}{X} \bullet \frac{\partial X}{\partial I} = \frac{I}{\frac{I}{3P_x}} \bullet \frac{1}{3P_x} = 1$$

$$\text{價格需求彈性} \equiv -\frac{P_x}{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial P_x} = -\frac{P_x}{\frac{I}{3P_x}} \cdot \left(-\frac{I}{3} \cdot \frac{1}{P_x^2}\right) = 1$$

(或－1，∵有的教科書定義價格彈性前面不加負號)

$$\text{價格交叉彈性} \equiv \frac{P_y}{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial P_y} = 0$$

Y 商品的：

$$\text{所得需求彈性} \equiv \frac{I}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{I}{\frac{2}{3} \cdot \frac{I}{P_y}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3P_y} = 1$$

$$\text{價格需求彈性} \equiv -\frac{P_y}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial P_y} = -\frac{P_y}{\frac{2}{3} \cdot \frac{I}{P_y}} \cdot \left(-\frac{2I}{3} \cdot \frac{1}{P_y^2}\right) = 1$$

(或－1)

$$\text{價格交叉彈性} \equiv \frac{P_x}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial P_x} = 0$$

(c) 以 $P_x = 8$ $P_y = 5$ $I = 240$ 代入 Demand Functions

得 | $X = 10$ $Y = 32$ |

(d) 有如解：max. $U(X,Y) = 9X^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$

$$\text{s.t. } 8X + 5Y \leqq 240 \text{ .... (A)}$$

$$4X + 6Y \leqq 180 \text{ .... (B)}$$

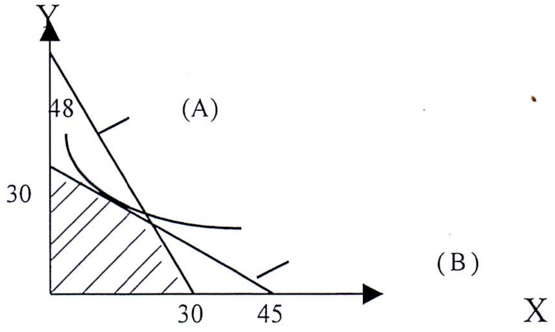
試 constraint (A) only 代入得 $X = 10$ $Y = 32$

代入 constraint (B) $232 > 180$ 不合

試 constraint (B) only 得 $X = 15$ $Y = 20$

代入 constraint (A)　$220 < 240$　(合)

$\therefore$ $\boxed{X = 15 \qquad Y = 20}$



(e) express everything in terms of "元"

則新的 $P_x = 8 + 2 = 10$

新的 $P_y = 5 + 3 = 8$　　新的 $I = 240 + 90 = 330$

代入 Demand Functions：$\boxed{X = 11 \quad Y = 27.5}$

$4 \times 11 + 6 \times 27.5 = 209$

$209 - 180 = 29$

$\therefore$ 會買入 29 張配給券

$U(\text{無買賣}) = 9 \bullet (15)^{\frac{1}{3}}(20)^{\frac{2}{3}} = 9 \bullet (6000)^{\frac{2}{3}}$

$U(\text{可自由買賣}) = 9 \bullet (11)^{\frac{1}{3}}(27.5)^{\frac{2}{3}} = 9 \bullet (8318.75)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ better off

2. (a) $MU_x = \dfrac{1}{X}$　　$MU_y = \dfrac{1}{Y}$

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{Y}{X}$$

解：

(1) $\dfrac{Y}{X} = \dfrac{P_x}{P_y}$

(2) $P_x + P_y = I$

$$\boxed{X = \frac{I}{2P_x}}$$ Demand Function

$$X\text{ 的所得彈性} \equiv \frac{I}{X} \bullet \frac{\partial X}{\partial I} = \frac{I}{\frac{I}{2P_x}} \bullet \frac{1}{2P_x} = 1$$

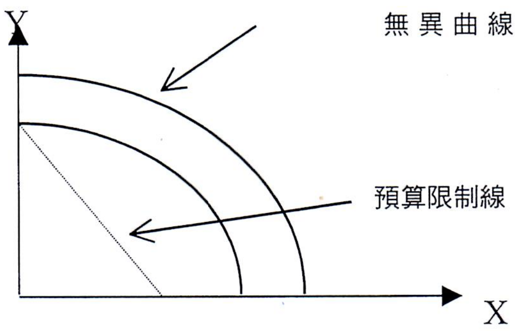
(b) 若依一般解法可得：

$$X = \frac{I\ P_x}{P_x^2 + P_y^2}$$

所得彈性 $= 1$

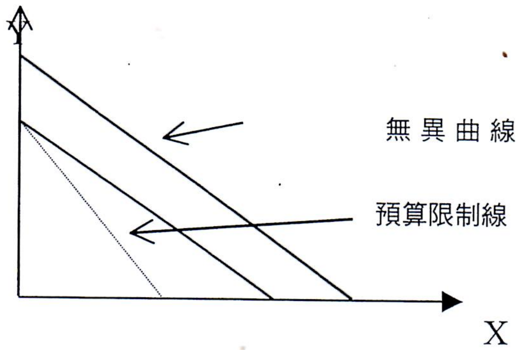
但第二階條件不合，無異曲線是向外凸的圓形。

正確答案應該是所謂的 corner solutions：



X =		所得彈性
0	if $P_x > P_y$	0
$\frac{I}{P_x}$	if $P_x < P_y$	1
0 或 $\frac{I}{P_x}$	if $P_x = P_y$	0 或 1

(c) 此題無異曲線是直線，也是 corner solutions：



			所得彈性
$X = $	0	if $P_x > P_y$	0
	$\frac{I}{P_x}$	$P_x < P_y$	1
	$0 \leqq X \leqq \frac{I}{P_x}$	$P_x = P_y$	不確定